11 Wellenphänomene

Wellen sind ein weiteres wichtiges physikalisches Phänomen

Anwendungen:

- Radiowellen
- Wasserwellen
- Fahrzeuge in einem Stau
- Licht
- Schall
- …

Wir wollen uns hier mit harmonischen Wellen befassen, d. h., dass man sie durch

- Sinus,
- Kosinus oder
- komplexe e-Funktionen

beschreiben kann.

Die Auslenkung u einer Größe, die sich wellenartig ausbreitet, ist z. B.

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t - \alpha)}$$

oder

$$u(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t - \alpha)$$

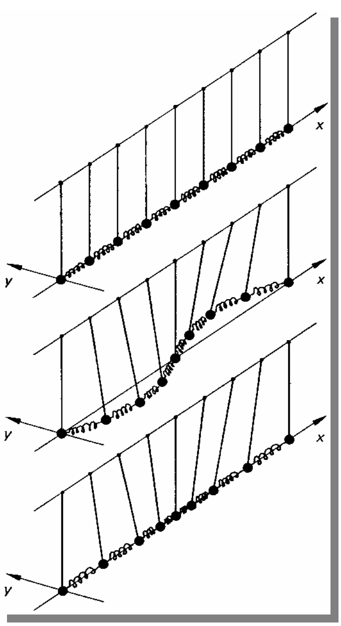
was das gleiche ist, nur, dass die beiden um 90° zueinander verschoben sind. Ebenfalls ist

$$u(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ e^{j(kx - \omega t - \alpha)} \right\}$$

eine harmonische Welle, eben nur in komplexer Form geschrieben. Das Neue an dieser Funktion ist, dass sie von zwei Variablen abhängt, nämlich vom Ort x und der Zeit t.

Um zu verstehen, was diese Funktionen leisten können, sehen wir uns einmal an, was passiert, wenn wir an einem festen Ort zu verschiedenen Zeiten die Funktion betrachten, z. B. am Ort $x=0$.

$$u(0,t) = \cos(-\omega t - \alpha)$$



Fortschreitende Welle zwischen gekoppelten Pendeln: (oben) Pendel mit Kopplungsfedern, (Mitte) Zustand einer Transversalwelle, (unten) Zustand einer Longitudinalwelle.

Dies ist eine periodische Funktion der Zeit, wie wir sie schon kennen. Wenn wir jetzt die Auslenkung u zum Zeitpunkt $t=0$ ansehen, stellen wir fest, dass

$$u(x,0) = A \cdot \cos(kx - \alpha)$$

ebenfalls periodisch ist, diesmal im räumlichen Sinn.

$\Rightarrow$

Insgesamt haben wir eine Welle, die sich in jedem Punkt sowohl räumlich als auch zeitlich periodisch verhält.

Die Ausbreitungsrichtung hängt vom Vorzeichen des Terms ωt ab. Für unsere Gleichung der Welle muss ein Punkt konstanter Auslenkung bei fortschreitender Zeit auch eine anwachsende Ortskoordinate haben.

$\Rightarrow$

Die Welle bewegt sich nach rechts im üblichen Koordinatensystem, wenn

$$u(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t - \alpha)$$

Eine sich nach links bewegende Welle hat die Form

$$u(x,t) = A \cdot \cos(kx + \omega t - \alpha)$$

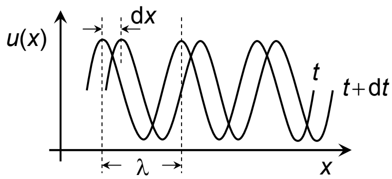
Die räumliche Periodizität von u ist durch k gegeben, und zwar ist

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \qquad \text{Wellenzahl } k$$

Die Wellenzahl k gibt die Anzahl der Wellenlängen auf 2π Meter an.

Die zeitliche Periodizität ist wie früher gegeben durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



Eine harmonische Welle zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t und $t+\mathrm{d}t$. Mit der Fortbewegung dieser Welle assoziiert man die Phasengeschwindigkeit v_{ph}.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle nach rechts bewegt, nennt man Phasengeschwindigkeit v_{ph}.

Sie ist mathematisch durch $v_{\mathrm{ph}} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ gegeben.

Dabei ist x ein bestimmter Punkt auf der Welle, z. B. ein Maximum. Für diesen Punkt (und jeden anderen festen Punkt) gilt, dass das Argument der Wellenfunktion konstant ist.

$$kx - \omega t - \alpha = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{k}\cdot(\text{const.} + \omega t + \alpha)$$

und die Ableitung (d. h. Phasengeschwindigkeit) ist

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k}} \qquad \left[v_{\mathrm{ph}}\right] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Die Welle breitet sich also mit der Geschwindigkeit

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot\nu}$$

aus, wobei $\nu = 1/T$ die Frequenz ist.

Das hier vorgestellte Konzept lässt sich mit Hilfe von Vektoren leicht auf mehrere Dimensionen verallgemeinern.

$$u(\vec{x},t) = A\cdot\cos(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{x}}_{\text{Skalar-produkt}} - \omega\cdot t - \alpha)$$

beschreibt eine <u>ebene Welle</u>, die sich in Richtung $\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$ ausbreitet.

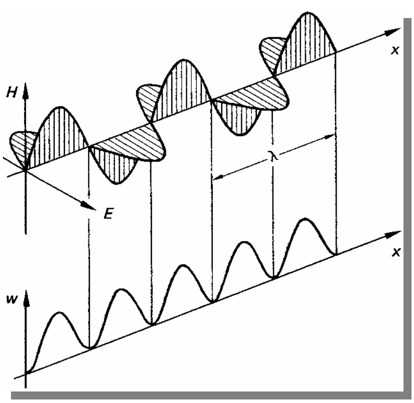
Für eine Kugelwelle ersetzt man den Ortsvektor $\vec{x}$ durch den Abstandsvektor $\vec{r}$ zum Koordinatensursprung.

$$u(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t - \alpha)$$

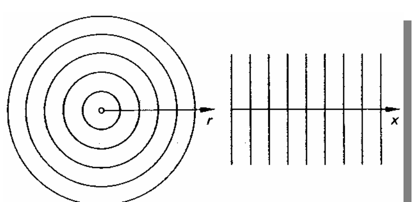
Jetzt haben wir die Ausbreitungsrichtung ins 3-dimensionale verallgemeinert. Wir können auch noch die Amplitude entsprechend erweitern, indem wir den Skalar A durch einen Vektor $\vec{A}$ ersetzen. Dann haben wir eine vektorielle Welle.

$$\boxed{\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{A} \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega \cdot t - \alpha)}$$

Beispiel für eine solche vektorielle Welle ist die elektrische Feldstärke einer sich ausbreitenden Lichtwelle.



Momentaufnahme einer elektro-magnetischen Welle:
(oben) Feldverteilung,
(unten) Energiedichte.



Wellenflächen einer Kugelwelle und einer ebenen Welle

11.1 Wellenausbreitung

Für Wellen gibt es ferner im allgemeinen drei verschiedene Polarisationen, d. h. Auslenkungsrichtungen relativ zur Ausbreitungsrichtung:

Transversalwellen: $\vec{u} \perp \vec{k}$

Auslenkung ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Hier gibt es immer zwei Möglichkeiten.

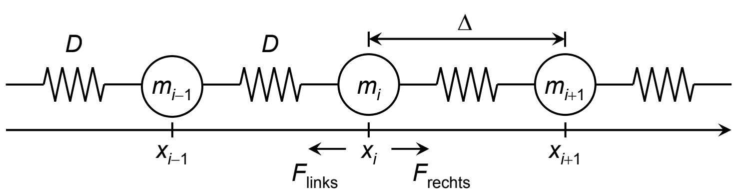
Longitudinalwellen: $\vec{u} \parallel \vec{k}$

Eine weitere Auslenkungsmöglichkeit ist diejenige in Richtung der Ausbreitungsrichtung, z. B. Schallwellen (Kompression der Luft pflanzt sich wellenartig im Raum fort).

11.2 Wellengleichung

Ähnlich wie bei den Schwingungsproblemen ist der Ausdruck für eine sich ausbreitende Welle die Lösung einer Bewegungsgleichung, die wegen des Charakters ihrer Lösung Wellengleichung heißt.

Zur Herleitung wollen wir eine Reihe hintereinander geschalteter Massen und Federn betrachten.



Für eine beliebige Masse m_i lassen sich die Kräfte, die an sie angreifen, so schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{links}} + \vec{F}_{\text{rechts}}$$

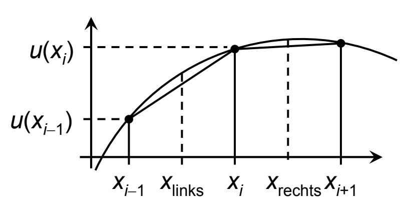
Nach dem Hooke'schen Gesetz lassen sich die Federkräfte als proportional zur Auslenkung u beschreiben.

$$F_{\text{links}} = -D \cdot (u_i - u_{i-1})$$
$$F_{\text{rechts}} = -D \cdot (u_i - u_{i+1}) = D \cdot (u_{i+1} - u_i)$$

mit $p = m \cdot v = m \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ erhalten wir:

$$m \cdot \ddot{u}_i = -D \cdot (u_i - u_{i-1}) + D \cdot (u_{i+1} - u_i)$$

Mathematisch gesehen, ist die Differenz der beiden Auslenkungen gleich der Änderung der Auslenkung mit x, denn, wenn keine Änderung stattfindet, wenn also zwei benachbarte Massen gleich ausgelenkt werden, ist die relative Kraft zwischen ihnen gleich wie in der Ruhelage.



Diese Änderung schreiben wir als Ableitung von u nach x in der Mitte zwischen x_{i-1} und x_i.

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{links}}}$$

Dabei ist x_{links} der Mittelpunkt zwischen x_{i-1} und x_i. Entsprechendes gilt rechts von x_i.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{rechts}}}$$

Eingesetzt ergibt sich für die Masse

$$m \cdot \ddot{u}_i = -D \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{links}} + D \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{rechts}}$$

Da der Abstand zwischen den Gleichgewichtslagen gleich ist, können wir auch schreiben

$$m \cdot \ddot{u}_i = D \cdot \Delta \cdot \underbrace{\left[\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{rechts}} - \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{links}} \right]}_{\text{Differenz der Steigung}}$$

Analog wie vorhin bei den Ableitungen kann man jetzt auch bei den Steigungen vorgehen, d. h.

$$\frac{\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{rechts}} - \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x_\text{links}}}{\underbrace{x_\text{rechts} - x_\text{links}}_{\Delta}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_i}$$

Wir erhalten jetzt folgende Gleichung

$$m \cdot \ddot{u}_i = D \cdot \Delta^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} = \frac{D \cdot \Delta^2}{m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$$

mit $v_\text{ph}^2 = \frac{D \cdot \Delta^2}{m}$ und der Erkenntnis für beliebige i folgt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = v_\text{ph}^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}}$$ **Wellengleichung**

Als Bedingung, dass die Lösung für alle Zeiten t und x gilt, finden wir, dass

$$v_\text{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Für unser Beispiel ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die Parameter D (Federkonstante), Δ und m gegeben. Die obige Gleichung $v_\text{ph}^2 = \omega^2 / k^2$ gilt aber allgemein.

Je nach dem betrachteten Problem ergeben sich dann verschiedene Ausdrücke für v.

Im Beispiel der Ausbreitung des Lichts ist v eben die Lichtgeschwindigkeit c und $c^2 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$ mit μ_0: absolute Permeabilität und ε_0: Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/Am} = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs/Am}$$
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$$

$\Rightarrow$

$$c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2{,}99792 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$$

Für die Ausbreitung des Schalls in einem Gas (z. B. Luft) ist die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

K: Kompressionsmodul
ρ: Dichte

Bis jetzt haben wir die Wellengleichung wiederum nur für eine Richtung x betrachtet, sie lässt sich aber ebenfalls für vektorielle Größen und beliebige Ausbreitungsrichtungen verallgemeinern.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 \vec{u}}{\mathrm{d}t^2} = v_{\mathrm{ph}}^2 \cdot \Delta \vec{u}}$$

allgemeine vektorielle Wellengleichung

wobei $\Delta \vec{u} = \mathrm{div\ grad}(\vec{u}) = \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$

Eine Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz führt zu einem Phänomen, das Interferenz genannt wird.

Abhängig von der relativen Phase addieren oder subtrahieren sich die Amplituden der Welle teilweise oder ganz.

Die Bedingung für eine maximale Überlagerung zweier Wellen ist, dass der Phasenunterschied oder Gangunterschied Δx entweder Null oder ein Vielfaches der Wellenlänge λ ist.

$$\boxed{\Delta x = \pm n \cdot \lambda}$$

Bedingung für „konstruktive" Interferenz
wobei $n=0, 1, 2, \ldots$

Die Bedingung für ein Interferenzminimum ist, dass die Phase zwischen den zwei Wellen immer um $\lambda/2$ oder ungeradzahlige Vielfache davon verschoben ist.

$$\boxed{\Delta x = \pm (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2}}$$

Bedingung für „destruktive" Interferenz
wobei $n=0, 1, 2, \ldots$

Eine vollständige Auslöschung erhält man bei zwei Wellen gleicher Frequenz dann, wenn zusätzlich zu der Bedingung auch noch die Amplituden gleich sind.

Für alle Formen der Interferenz muss ferner erfüllt sein, dass die Wellen kohärent sind. Damit meint man, dass ihr Phasenunterschied zeitlich konstant sein muss, sonst ist eine Überlagerung, die zeitlich andauern soll, nicht möglich; es entstehen lediglich kurzzeitige Fluktuationen in den addierten Wellen.

Gelingt es, zwei Enden einer Saite oder eines Seiles festzuhalten und Schwingungen anzuregen, kann man eine stehende Welle erzeugen.

Dabei muss erfüllt sein, dass

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = l$$

$n=1, 2, 3, \ldots$
l: Resonatorlänge

Man nennt dies die Resonatorbedingung. Man hat dann eine Überlagerung einer nach links und einer nach rechts propagierenden Welle derart, dass die Schwingungsbäuche und Knoten sich nicht bewegen.

Wir haben bereits gesehen, dass man nach FOURIER beliebige periodische Funktionen als Überlagerung von vielen Sinus- oder Kosinusfunktionen ansehen kann. Wir haben dies an einer Rechteckfunktion verdeutlicht.

Wie schnell bewegt sich jetzt so ein Rechteckpuls fort? Läuft er gleich schnell wie die einzelnen Komponenten, schneller oder langsamer?

Sehen wir uns die Summe von vier Sinusfunktionen an, die eine **Wellengruppe** oder ein **Wellenpaket** beschreiben. Bewegen sich alle Teilwellen, aus denen das Wellenpaket zusammengesetzt ist, mit gleicher Geschwindigkeit, verschiebt sich auch das Wellenpaket mit dieser Geschwindigkeit.

Sind jedoch die Phasengeschwindigkeiten für verschiedene Wellenlängen unterschiedlich, ist dies nicht mehr der Fall.

Sind z. B. kürzere Wellen langsamer in ihrer Phasengeschwindigkeit, bewegt sich das Wellenpaket insgesamt langsamer.

$\Rightarrow$

Man definiert für Wellengruppen die **Gruppengeschwindigkeit** $\boldsymbol{v_{Gr}}$.

Das Phänomen unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit für unterschiedliche Wellenlängen heißt **Dispersion**.

Ein Beispiel ist die Fortbewegung von Schall in einem festen Körper (akustische Wellen).

Die Phasengeschwindigkeit ist $v_{ph} = \omega / k$, ist also für eine bestimmte Wellenlänge durch die Gerade gegeben, die durch den Punkt (k, ω) und den Ursprung geht, z. B.

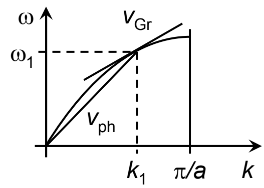
$$v_{ph}(k_1) = \frac{\omega_1}{k_1}$$

Die Gruppengeschwindigkeit hingegen ist durch die Ableitung der Funktion $\omega(k)$ an einem mittleren k-Wert der Wellengruppe gegeben.

$$\boxed{v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk}}$$ **Gruppengeschwindigkeit**

Dies ist die Steigung der Tangente, die $\omega(k)$ in k_1 berührt. Hier gilt offensichtlich

$$v_{Gr} = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_1} < \frac{\omega_1}{k_1} = v_{ph}$$



Dispersion von Schall in einem Festkörper. Erreicht bei großen $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenlänge den doppelten Abstand der Atome, propagiert ein Wellenpaket überhaupt nicht mehr ($v_{Gr} = d\omega/dk = 0$ in der Nähe von $k = \pi/a$), während die Phasengeschwindigkeit von Null verschieden ist.

Man beachte, dass die Gruppengeschwindigkeit Null wird, wenn die Wellenlänge des Schalls $\lambda \approx 2a$ ist. Ein Schallpaket kommt im Festkörper nicht vorwärts.

Weitere Beispiele:

- Ein Lichtpuls breitet sich im Vakuum (oder auch in Luft) mit Lichtgeschwindigkeit aus, da die Dispersion im Vakuum Null ist (d. h. $d\omega/dk = c$).
- In Medien (z. B. einer Glasfaser) ist dies nicht der Fall, da dort die Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt ($v_{Gr} = d\omega/dk = c/n(\omega)$), Licht also der Dispersion unterliegt.

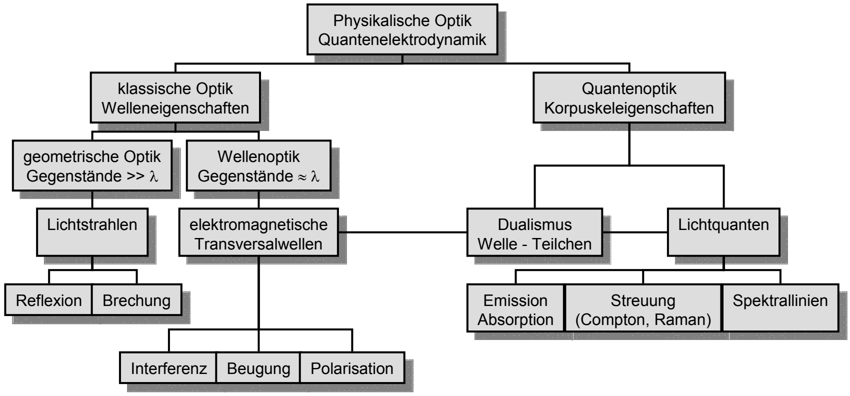
  $\Rightarrow$ Als Konsequenz ergibt sich, dass der Lichtpuls zeitlich auseinander geht.

Wichtig:

Wichtig ist, dass Informationen, die im Wesentlichen in den Pulsen (z. B. elektrischen bzw. Lichtpulsen) enthalten (gespeichert) sind, nur mit der Gruppengeschwindigkeit übertragen werden können.

Eine weitere Konsequenz der Dispersion ist z. B. die Farbzerlegung von weißem Licht im Prisma oder auch der Regenbogen am Himmel.

Aufteilung der Optik



Hauptgebiete:

- Geometrische Optik (Strahlenoptik)
- Wellenoptik
- Quanten- oder Photonenoptik