

8 Arbeit, Energie - Leistung

- 8.1 Arbeit
- 8.2 Verschiedene Arten mechanischer Arbeit
- 8.3 Leistung
- 8.4 Energie
- 8.5 Felder
- 8.6 Satz von der Erhaltung der Energie
 - 8.6.1 Energieumwandlung
- 8.7 Stoßprozesse
 - 8.7.1 Gerader, zentraler, elastischer Stoß
 - 8.7.2 Gerader, zentraler, inelastischer Stoß

8.1 Arbeit

Die Definition der Arbeit lautet:

Wird ein Körper unter Einwirkung einer konstanten Kraft \vec{F} um einen Weg \vec{s} verschoben, wird dabei die Arbeit W verrichtet.

mathematisch ausgedrückt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad \text{Skalarprodukt von } \vec{F} \text{ und } \vec{s}$$

Die Einheit der Arbeit ist

$$[W] = N \cdot m = J = \text{Joule}$$

Die Arbeit ist ein Skalar, also eine Größe, die nur einen Betrag hat, aber keine Richtung, wie z. B. die Masse, die Länge eines Vektors, ...

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z)$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

Entsprechend diesem inhaltlichem Unterschied gibt es auch zwei unterschiedliche Rechenvorschriften, wie die Multiplikation ausgeführt werden soll.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \quad \text{Skalarprodukt}$$

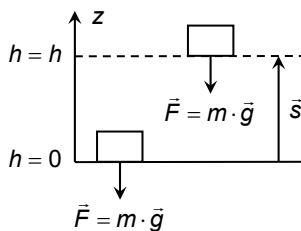
$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha \quad \text{Vektorprodukt}$$

Das Skalarprodukt wird also maximal, wenn beide Vektoren parallel sind, und Null, wenn beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Dies ist genau umgekehrt zum Vektorprodukt.

Beispiel:

Welche Arbeit muss geleistet werden, um einen Stein der Masse m auf die Höhe h zu heben?

8.1 Arbeit



Damit wird die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{s} = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{s} = m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \\ &= m \cdot (0 + 0 + (-g) \cdot h) \\ &= -m \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

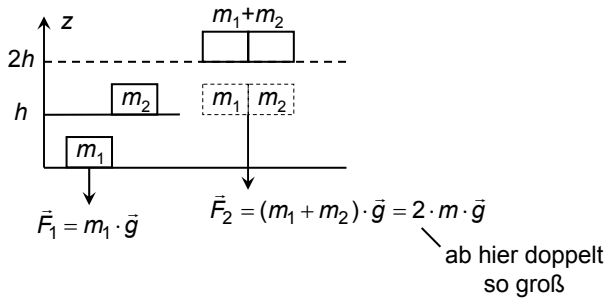
Diese Arbeit muss geleistet werden, um die Masse auf die Höhe h zu heben, deswegen hat sie auch ein negatives Vorzeichen. (Kraft ist antiparallel zu dem Weg.)

(Umgekehrt wird der Körper von h auf 0 gebracht, dann wird die Arbeit vom Körper verrichtet.)

Ist die Kraft längs eines Weges nicht konstant, muss man den Weg in Stücke zerlegen, entlang derer die Kraft konstant ist. Die Gesamtarbeit W_{ges} ist dann die Summe der einzelnen Arbeiten W_i

$$W_{\text{ges}} = \sum_i W_i$$

Als Beispiel nehmen wir den einfachen Fall, dass man von zwei gleichen Ziegelsteinen erst einen von $h = 0$ nach h und dann beide von h nach $2h$ heben soll.



Wie groß ist die Gesamtarbeit?

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ges}} &= W_1 + W_2 = -m_1 \cdot g \cdot h - (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h \stackrel{m_1=m_2}{=} -(m \cdot g \cdot h + 2 \cdot m \cdot g \cdot h) \\
 &= -3 \cdot m \cdot g \cdot h
 \end{aligned}$$

Im Allgemeinen lassen wir zu, dass sich die Kräfte, für die wir geleistete Arbeit berechnen wollen, kontinuierlich verändern. Dann müssen die Wegstücke zu unendlich kleinen Teilwegen werden, und wir kommen zur Integralformulierung der Arbeit über den Zwischenschritt

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i(\vec{s}) \cdot \Delta \vec{s}_i$$

für endlich viele Teilwege $\Delta \vec{s}_i$. Im Grenzfall $\Delta \vec{s}_i \rightarrow 0$ führt das zum **Arbeitsintegral**

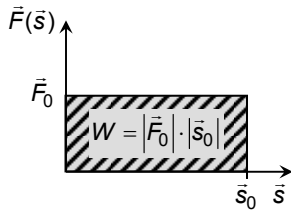
$$W = \int_1^2 \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}$$

allgemeine Definition der Arbeit

Arbeit = Linienintegral der Kraft

Bemerkungen:

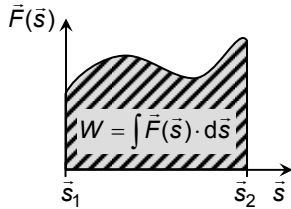
Arbeitsdiagramme:



$$\text{Ist } \vec{s} \parallel \vec{F}, \text{ dann ist } \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \stackrel{\alpha=0}{=} |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$$

Arbeit = Fläche unter der Kurve
im \vec{F} - \vec{s} Diagramm

\vec{F} ist eine Funktion von \vec{s} , d. h. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$

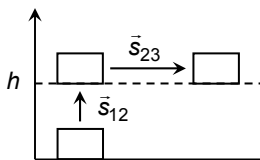


$$W = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Arbeit = Fläche unter der Kurve
im \vec{F} - \vec{s} Diagramm

8.1 Arbeit

Was passiert, wenn der Körper auf der Höhe h verschoben wird?



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}_{12} + \vec{F} \cdot \vec{s}_{23}$$

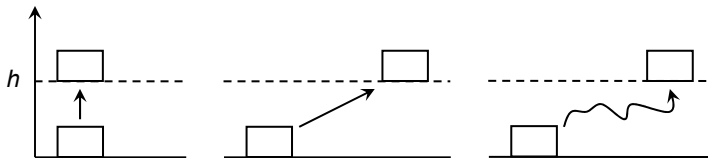
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_{23} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{s}_{12} = -m \cdot g \cdot h$$

$$\vec{F} \cdot \vec{s}_{23} = -m \cdot g \cdot 0 + 0 \cdot x = 0$$

Bei einer Verschiebung der Masse senkrecht zur Kraft \vec{F} (d. h. $\vec{s} \perp \vec{F}$) wird keine Arbeit verrichtet.

Die Hubarbeit ist nur abhängig von der Höhendifferenz und nicht vom Weg.



In all diesen drei Fällen muss dieselbe Hubarbeit geleistet werden.

8.2 Verschiedene Arten von mechanischer Arbeit 10

a) Hubarbeit auf der Erde

Um einen Körper gegen eine konstante Gewichtskraft $m \cdot g$ um die Höhe h anzuheben, ist die Hubarbeit W_H nötig.

$$W_H = m \cdot g \cdot h$$

b) Beschleunigungsarbeit

Um einen Körper zu beschleunigen, muss auf einer Strecke \vec{s} die Beschleunigungskraft $\vec{F}_B = m \cdot \vec{a}$ wirken.

$$\begin{aligned} W &= \int m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{s}}{dt}}_{=:\vec{v}} = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \left. \frac{\vec{v}^2}{2} \right|_{v_1}^{v_2} \\ &= \frac{m}{2} \cdot (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2) \end{aligned}$$

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2)$$

Beschleunigungsarbeit, um den Körper von \vec{v}_1 auf \vec{v}_2 zu bringen

8.2 Verschiedene Arten von mechanischer Arbeit 11

Sonderfall: $\vec{v}_1 = 0$ (d. h. Beschleunigung aus dem Stand)

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2$$

Bem.: W_B hängt nicht von a und t ab, sondern nur von $|\vec{v}|$.

c) Spannarbeit bei einer elastischen Feder

Wie groß ist die Arbeit, die in das Spannen einer Feder gestreckt werden muss, die von ihrer Ruhelage $\vec{x}_1 = 0$ bis $\vec{x}_2 = x'$ gespannt werden soll?

$$W_S = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

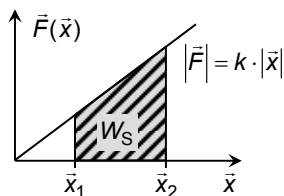
Die Kraft einer Feder ist nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x}$$

mit der Federkonstanten k .

8.2 Verschiedene Arten von mechanischer Arbeit 12

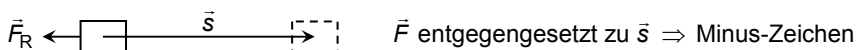
$$W = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} -k \cdot \vec{x} \cdot d\vec{x} = -k \cdot \frac{\vec{x}^2}{2} \Big|_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} = -\frac{k}{2} \cdot (\vec{x}_2^2 - \vec{x}_1^2)$$



da Arbeit verrichtet werden muss

d) Reibarbeit

Ein Körper werde auf horizontaler Ebene ($W_H = 0$) mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = \text{const.}$ ($W_B = 0$) bewegt. Zur Überwindung der Reibkraft $|\vec{F}_R| = \mu \cdot m \cdot g$ ist Reibarbeit W_R nötig.



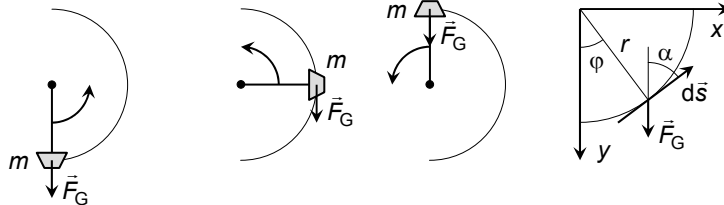
8.2 Verschiedene Arten von mechanischer Arbeit 13

$$W_R = -\mu \cdot m \cdot g \cdot |\vec{s}|$$

Arbeit muss verrichtet/geleistet werden

e) Fall, bei dem \vec{F} und \vec{s} nicht parallel sind

Welche Arbeit bringt der Motor einer Schiffsschaukel auf, der das „Schiff“ der Masse m reibungsfrei aus der Gleichgewichtslage von unten nach oben dreht? Der Abstand von der Achse zur Masse sei r .



Nachdem was wir bislang wissen, müssen wir über den Halbkreis integrieren, da sich der Winkel α zwischen der Schwerkraft \vec{F} und den Wegstückchen $d\vec{s}$ kontinuierlich ändert. Genauer gesagt, ist

8.2 Verschiedene Arten von mechanischer Arbeit 14

$$W = \int_{\text{unten}}^{\text{oben}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi} m \cdot g \cdot r \cdot d\varphi \cdot \cos \alpha$$

mit $\vec{F} = -\vec{F}_G = m \cdot g$, wobei wir ausgenutzt haben, dass ein kleines Kreisbogenstück gerade gleich Radius mal Winkeländerung ist ($d\vec{s} = r \cdot d\varphi$). Drücken wir α durch φ ($\alpha = \pi/2 - \varphi$) aus, wird aus unserem Integral

$$W = m \cdot g \cdot r \cdot \int_0^{\pi} \cos(\pi/2 - \varphi) d\varphi$$

mit $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ ergibt dies:

$$W = m \cdot g \cdot r \cdot \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = m \cdot g \cdot r \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = m \cdot g \cdot r \cdot [1 - (-1)]$$

$$W = 2 \cdot m \cdot g \cdot r$$

Dasselbe Ergebnis hätten wir erhalten, wenn die Schiffsschaukel senkrecht auf die Höhe $h = 2r$ gehoben hätten.

⇒ **Arbeit unabhängig vom zurückgelegten Weg**

Bei technischen Anwendungen spielt oft nicht nur die geleistete Arbeit eine Rolle, sondern auch die Zeit, in der die Arbeit verrichtet wird. Wir führen deshalb den Begriff der Leistung P („power“) ein. Sie entspricht einer geleisteten Arbeit pro Zeiteinheit, ist ein Skalar und wird mit P bezeichnet.

$$P = \frac{W}{t} \quad [P] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W(att)}$$

Für eine sich kontinuierlich ändernde Kraft gibt es einen entsprechenden differentiellen Ausdruck

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

der die momentane Leistung angibt, wenn mit einer Kraft \vec{F} und einer Geschwindigkeit \vec{v} Arbeit verrichtet wird. Die gesamte verrichtete Arbeit ergibt sich wieder aus dem Integral über die Leistung

$$W = \int \frac{dW}{dt} dt = \int P(t) dt = \int \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

Größenordnungen von Leistungen

Kraftwerke	1500 MW
Flugzeugtriebwerke (Boeing 727)	3×5 MW
Lokomotiven	einige MW
Automotoren	20 ... 200 kW (1 PS = 736 W)
Öfen für Zimmerheizung	1 ... 10 kW
Dauerleistung eines Menschen	100 W
Glühlampen	10 ... einige 100 W

Einer der wichtigsten Begriffe in der Physik ist Energie. Die an einem abgeschlossenen System verrichtete Arbeit wird in irgendeiner Form gespeichert. Diese gespeicherte Arbeit heißt Energie. Da die gespeicherte Arbeit wieder freigesetzt werden kann, ist Energie die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten. Man vereinbart daher die Vorzeichen bei der Arbeit so, dass an einem System geleistete Arbeit dessen Energie vergrößert. Einfaches Beispiel dieses Konzeptes ist die hochgehobene Masse m . Lässt man sie los, fällt sie wieder herunter. Mit dem Hochheben hat man an ihr Arbeit verrichtet, sie speichert im hochgehobenen Zustand so genannte potentielle Energie. Diese potentielle Energie kann durch Herunterfallen in Bewegungsenergie umgesetzt werden.

Die Verwendung des Begriffs potentielle Energie ist nur erlaubt, wenn die Kraft ausschließlich ortsabhängig ist.

Kräfte, die diese Eigenschaften haben, werden **konservativ** genannt.

(Beispiele: Gravitationskraft – Massenanziehung,
Coulombanziehung – elektrostatische Anziehung, ...)

Die Arbeit gegen eine konservative Kraft führt also zur Speicherung in Form von potentieller Energie.

8.4 Energie

Es gilt demnach für die Änderung in der potentiellen Energie E_{pot}

$$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Das Minuszeichen drückt aus, dass wir die Arbeit gegen eine Kraft \vec{F} verrichten.

Für den Fall der Masse m , die von $h = 0$ auf die Höhe h gehoben wird ($\vec{F} = -m \cdot \vec{g}$), erhöht sich die potentielle Energie um

$$E_{\text{pot}} = +m \cdot g \cdot h$$

Für eine gespannte Feder ist die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = +\frac{1}{2} k \cdot x^2$$

Wird die Kraft hingegen ausschließlich zur Änderung der Geschwindigkeit verwendet, ist die gespeicherte Energie eine Funktion der Geschwindigkeit.

Sie heißt Bewegungsenergie oder kinetische Energie E_{kin} .

$$E_{\text{kin}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}^2$$

Die kinetische Energie nimmt also quadratisch mit der Geschwindigkeit zu.

Mit dem vorhin definierten Impuls $\vec{p} := m \cdot \vec{v}$ können wir die kinetische Energie auch folgendermaßen ausdrücken

$$E_{\text{kin}} = \frac{\vec{p}^2}{2 \cdot m}$$

Bem.:

Die Reibarbeit $W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$ wird nicht in eine der mechanischen Energieformen (E_{pot} oder E_{kin}) gespeichert, sondern in Form von Wärmeenergie.

$$W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s \rightarrow \text{W\u00e4rme}$$

8.5 Felder

Es gibt noch einen Begriff, den wir zu unserer Erleichterung einf\u00fchren wollen und zwar ist es der des **Feldes**. Ein Feld gibt es uns die M\u00f6glichkeit, r\u00e4umlich variierende Vektoren zu beschreiben. F\u00fcr jeden Punkt eines Feldes muss demnach eine Richtung und ein Betrag angegeben sein.

Ein Beispiel ist das Gravitationsfeld \vec{E}_{Gr} , bei dem die Gravitationskraft immer in Richtung der sie verursachenden Masse zeigt und betragsm\u00e4\u00dfig mit dem Quadrat des Abstandes abnimmt. Ein anderes Beispiel ist das elektrische Feld.

Vergleich Gravitationsfeld und elektrisches Feld

Gravitationskraft (-gesetz):

$$\vec{F}_{\text{Gr}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{e}_{21}$$

$$\vec{F}_{\text{Gr}} = m_2 \cdot \vec{E}_{\text{Gr}}$$

$$\vec{E}_{\text{Gr}} = -G \cdot \frac{m_1}{r_{12}^2} \cdot \vec{e}_{21}$$

Gravitationsfeld

Coulombgesetz:

$$\vec{F}_{\text{Col}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{21}$$

$$\vec{F}_{\text{Col}} = q_2 \cdot \vec{E}_{\text{Col}}$$

$$\vec{E}_{\text{Col}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \vec{e}_{21}$$

elektrische Feldst\u00e4rke

Beschreibt das Feld eine konservative Kraft, ist es ein konservatives Kraftfeld. Für konservative Kraftfelder gelten Besonderheiten:

- a) Die Arbeit, die gegen ein konservatives Kraftfeld verrichtet wird, ist unabhängig vom eingeschlagenen Weg und damit ausschließlich von Anfangs- und Endpunkt bestimmt.

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} \quad \text{für konservative Kraftfelder}$$

- b) Es folgt die äquidistante Aussage, dass die Arbeit entlang eines geschlossenen Weges in einem konservativen Kraftfeld Null ist.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Bem.:

Der Feldbegriff ist von der Probemasse bzw. Probeladung unabhängig und beschreibt die Kraftwirkung auf sie (allgemeine Theorien möglich).

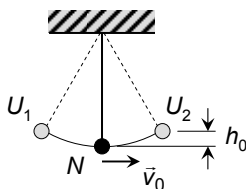
8.6 Satz von der Erhaltung der Energie

8.6.1 Energieumwandlung

Die beiden mechanischen Energieformen E_{pot} und E_{kin} können schon bei sehr einfachen mechanischen Vorgängen ineinander umgewandelt werden. Dabei entsteht im idealen Fall kein Verlust an Energie.

Beispiele:

a) Fadenpendel



$U_1, U_2 = \text{Umkehrpunkte}$

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h_0$$

$$E_{\text{kin}} = 0$$

bei Nulldurchgang:

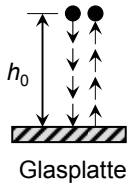
$$E_{\text{pot}} = 0 \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_0^2$$

$$E_{\text{pot}}(U) = E_{\text{kin}}(N)$$

$$m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vec{v}_0^2 \Rightarrow |\vec{v}_0| = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

b) Tanzende Stahlkugel

Die Kugel wird aus der Höhe h_0 fallengelassen und erreicht nach elastischer Reflexion an der Glasplatte fast wieder die volle Höhe h_0 :



$$m \cdot g \cdot h_0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \bar{v}_0^2 \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \bar{v}_0^2 \rightarrow m \cdot g \cdot h_0$$

8.6 Satz von der Erhaltung der Energie

Energiesatz (für mechanische Größen):

In einem abgeschlossenen System bleibt die mechanische Gesamtenergie $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ konstant, wenn nur konservative Kräfte walten.

Erweiterung zum Allgemeinen:

Satz von der Erhaltung der Energie

In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtenergieinhalt konstant.

⇒ Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

Folgerung:

Energie kann weder vernichtet noch aus dem nichts erzeugt werden, sie kann nur von einer Form in eine andere Energieform umgewandelt werden.

⇒ **Es gibt kein Perpetuum mobile 1. Art.**

Bei einem Stoß berühren sich (mindestens) zwei Körper kurzzeitig, wobei sie abrupt ihre Bewegungszustände ändern. Typisch ist eine sehr kurze Kontaktzeit, in der meist hohe Kräfte auftreten.

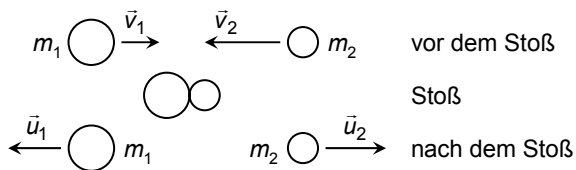
Beispiele: Billardstöße, Autounfälle, Stöße zwischen Atomen, ...

Die Einteilung der Stöße erfolgt nach zwei Kriterien:

- nach dem geometrischen Ablauf
- nach der Aufteilung der Geometrie

8.7.1 Gerader, zentraler, elastischer Stoß

Zwei vollkommen elastische Körper bewegen sich auf einer geraden Linie aufeinander zu und erleiden einen geraden zentralen elastischen Stoß.



8.7 Stoßprozesse

- a) Da das System abgeschlossen ist, gilt der Impulssatz:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 \quad \text{Impulssatz, Impulserhaltung}$$

- b) Da der Stoß vollkommen elastisch sein soll (ideal), geht keine kinetische Energie verloren.

$$m_1 \cdot \frac{\vec{v}_1^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\vec{v}_2^2}{2} = m_1 \cdot \frac{\vec{u}_1^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\vec{u}_2^2}{2} \quad \text{Energiesatz, Energieerhaltung}$$

Annahme:

\vec{v}_1, \vec{v}_2 vor dem Stoß seien bekannt
 \vec{u}_1, \vec{u}_2 nach dem Stoß seien gesucht

⇒ zwei Gleichungen, zwei Unbekannte

Durch Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{aus Energiesatz:} \quad m_1 \cdot (\vec{v}_1^2 - \vec{u}_1^2) &= m_2 \cdot (\vec{v}_2^2 - \vec{u}_2^2) \\ m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{u}_1) &= m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2) \cdot (\vec{v}_2 + \vec{u}_2) \end{aligned}$$

aus Energiesatz: $m_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 \cdot (\vec{v}_2 - \vec{u}_2)$

Division beider Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{u}_1 &= \vec{u}_2 + \vec{v}_2 \\ \Rightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 &= -(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \quad (*) \end{aligned}$$

Vom Körper 2 aus gesehen, bewegt sich Körper 1 nach dem Stoß mit derselben Relativgeschwindigkeit weg (-), mit der er vor dem Stoß auf Körper 2 zugelaufen ist.

Setzt man (*) in den Impulssatz ein, so erhält man:

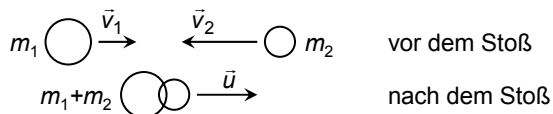
$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 &= \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Stoßgesetze für den elastischen Stoß

8.7 Stoßprozesse

8.7.1 Gerader, zentraler, inelastischer Stoß

Sind die beiden Stoßparameter völlig inelastisch, dann treten beim Stoß keine Rückstellkräfte auf. Nach dem Stoß bleiben die beiden Stoßparameter zusammen und bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit \vec{u} .



mit dem Impulssatz: $m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Bem.: \vec{u} lässt sich allein aus dem Impulssatz bestimmen.

Energieerhaltung:

$$m_1 \cdot \frac{\vec{v}_1^2}{2} + m_2 \cdot \frac{\vec{v}_2^2}{2} = (m_1 + m_2) \cdot \frac{\vec{u}^2}{2} + \Delta E$$

$\Delta E =$ Verlust an kinetischer Energie
(Verformungsarbeit und Wärme)