3. Meßfehler

3.1 Messungenauigkeit - Fehlerfortpflanzungsgesetz:

"Wer misst, macht Fehler"

Der wahre Wert x_w ist prinzipiell unbekannt.

→ **Aufgabe für den Messtechniker:**

dem Wert x_w möglichst nahe kommen

Messabweichung: $\Delta x = x - x_w$

- Grobe Fehler — vermeidbar
- Systematische Messabweichung — korrigierbar
- Statistische Messabweichung — unkontrollierbare Störeinflüsse

→ **Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung:**

- Auswertung und Beurteilung einer Messreihe
- Untersuchung der Fehlerfortpflanzung

Systematische Messunsicherheit und ihre Fortpflanzung:

Ursachen bekannt und prinzipiell eliminierbar !!!

z.B.:
- Unvollkommenheit der Messgeräte
- Skalenfehler
- verbogener Zeiger

- Fehlerbehaftete Größen in einer Formel
- wichtig nicht nur:
  - wie wird eine Größe messtechnisch erfasst
- sondern (v.a.):
  - wie genau kann die Größe bestimmt werden ?

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

$$\Delta y = y - y_w =$$
$$= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Taylorreihe, nach 1. Glied abgebrochen

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

Fortpflanzung bei systematische Messunsicherheit:

Beispiel 1: $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_i x_i + \ldots + a_n x_n$

$$\Delta y = a_1 \Delta x_1 + \cdots + a_i \Delta x_i + \cdots + a_n \Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i$$

Summe der mit den Koeffizienten multiplizierten Einzelfehler

Beispiel 2: $y = a_1 x_1^{b_1} \cdot a_2 x_2^{b_2} \cdot \ldots a_i x_i^{b_i} \cdot \ldots \cdot a_n x_n^{b_n}$

Partielle Ableitung nach x_1

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1 \cdot a_1 x_1^{b_1 - 1} \cdot a_2 x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n x_n^{b_n} = y \cdot \frac{b_1}{x_1}$$

Allgemein: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = y \frac{b_i}{x_i}$ folgt $\Delta y = y \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$

Hier mit relativen Fehlern rechnen:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta x_i}{x_i}}$$

Zahlenbeispiel aus der Elektrotechnik:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot R^{-1} \qquad I = \frac{U}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= -0{,}011 \\ \frac{\Delta R}{R} &= -0{,}031 \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Delta x_i}{x_i} = 2(-0{,}011) - 1(-0{,}031)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} = +0{,}009$$

Zufälliger Fehler – statistische Messunsicherheit:

- Hervorgerufen durch nicht erfassbare/beeinflussbare Änderungen:
  - Messgerät
  - Umwelt
  - Beobachter
- Betrag und Vorzeichen nicht feststellbar
- Wiederholte Messungen streuen
- n Einzelmessungen: $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$

Wiederholte Messungen streuen:

Messwerte: x_i

Einzelmessungen: $x_1, \dots, x_i, \dots x_n$

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$

Wahrer Fehler der Einzelmessungen ε_i	**Scheinbarer Fehler** der Einzelmessungen v_i
$\varepsilon_1 = x_1 - x_w$ $\varepsilon_i = x_i - x_w$ $\varepsilon_n = x_n - x_w$	$v_1 = x_1 - \bar{x}$ $v_i = x_i - \bar{x}$ $v_n = x_n - \bar{x}$
Nicht bestimmbar, da x_w unbekannt	Bestimmbar, da $\bar{x}$ bekannt

Gauß (1795):

... sei das Messresultat so festzulegen, dass die Summe der Quadrate aller scheinbaren Fehler zu einem Minimum wird, d.h.

$$v_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$
$$+$$
$$v_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$$
$$+$$
$$v_n^2 = (x_n - \bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \stackrel{!}{=} \text{MIN}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sum v_i^2}{d\bar{x}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\bar{x}} \sum \left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum \left(-2x_i + 2\bar{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{Mittelwert}$$

für $n \to \infty \quad \Rightarrow \bar{x} \to x_w$

Wie gut diese Schätzung ist, sieht man an der Breite der Verteilung, beschrieben durch die Streuung oder Standardabweichung σ:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

für n >> 1ergibt sich durch Ausmultiplizieren

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum x_i^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot \sum x_i + \sum \bar{x}^2 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum x_i^2 - 2 \cdot n \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} + \sum \bar{x}^2 \right)}$$

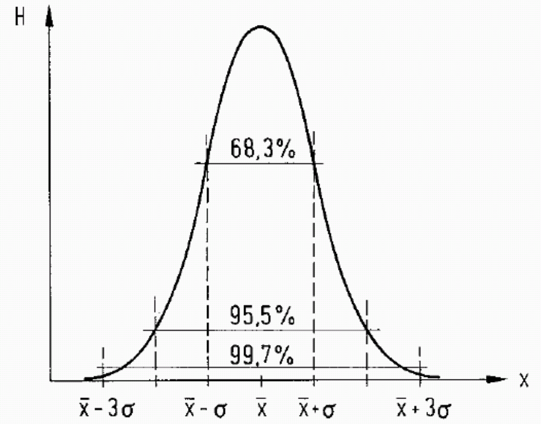
$$= \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

Mit zufälligen Fehlern behaftete Größen sind im allgem. normalverteilt, d.h. sie folgen einer Normal- oder Gauß-verteilung:

Eine Einzelmessung der Größe x hat die Wahrscheinlichkeit p(x)dx, einen Wert aus dem Intervall (x, x+dx) zu ergeben, wobei

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Das Bild dieser Funktion ist eine symetrische Glockenkurve mit dem maximum bei x = $\bar{x}$.



Gaußsche Normalverteilung

Zusammenfasung – Messunsicherheit, Definitionen:

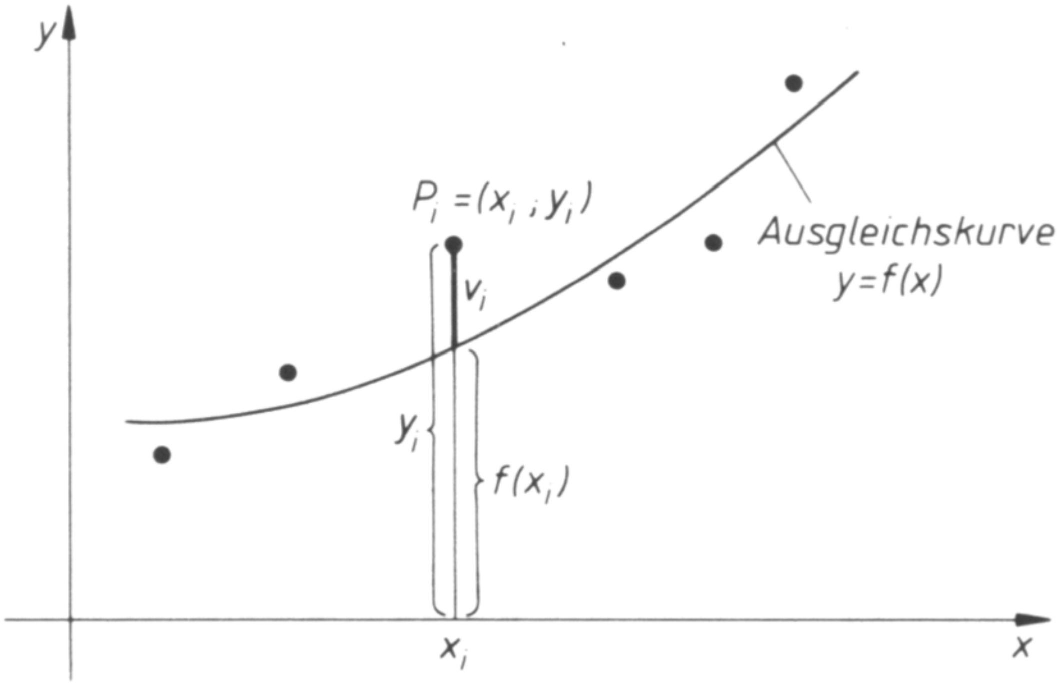
Bedeutung	Formel	Bemerkung
Wahrer Wert	x_W	grundsätzlich nicht bestimmbar
Messwerte	$x, x_1, x_2, \ldots, x_n$	
Messabweichung	$\Delta x = x - x_W$	nicht bestimmbar
Mittelwert	$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	n = Anzahl der Messwerte
Wahre Messabweichung der Einzelmessung	$\varepsilon_i = x_i - x_W$	nicht bestimmbar
Scheinbare Messab-weichung der Einzelm.	$v_i = x_i - \overline{x}$	

Zusammenfasung – Messfehler, Definitionen:

Bedeutung	Formel	Bemerkung
Standardabweichung $n \to \infty$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_W)^2}{n}}$	
Standardabweichung $n < \infty$	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$	
Gaußsche Glockenkurve	$y = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$	
Mittlere Abweichung des Mittelwertes / "Vertrauensbereich"	$\Delta\overline{x} = \frac{s}{\sqrt{n}}$	
Gaußsches Fehler-Fortpflanzungsgesetz	$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$	

3.2 Ausgleichskurven (Lineare Regression):

Unter einer Ausgleichskurve versteht man eine Kurve, die sich n vorgegebenen Meßpunkten *„optimal“* anpaßt:



Man bestimmt sie nach *Gauß* wie folgt:

1. Zunächst ist anhand des konkreten Falles eine Entscheidung über den speziellen Funktionstyp, der der Ausgleichsrechnung zugrunde gelegt werden soll, zu treffen (z.B. Gerade (lineare Regression), Parabel, Potenz- oder Exponentialfunktion). Der Lösungsansatz **y = f(x)** enthält dabei noch gewisse Parameter a, b, c, ...

2. Dann wird für jeden Meßpunkt $P_i=(x_i,y_i)$ die vertikale Abweichung $v_i = y_i - f(x_i)$ von der Ausgleichskurve y = f(x) bestimmt und daraus die Summe der Abweichungsquadrate:

$$S(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$$

   Sie hängt noch von den Kurvenparametern a, b, c, ... ab

3. Nach Gauß paßt sich diejenige Kurve den vorgegebenen Meßpunkten „am besten" an, für die diese Summe minimal wird (*Methode der Kleinsten Quadrate*). Die Paramter a, b, c, ... lassen sich aus den sog. Normalgleichungen (Extremalbedingungen)

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \ldots.$$

berechnen.

Einfache Lösungsansätze für Ausgleichskurven (Tabelle)

Lösungsansatz		Parameter
Lineare Funktion (Gerade):	$y = a.x+b$	a,b
Quadratische Funktion(Parabel):	$y = a.x^2+b.x+c$	a,b,c
Potenzfunktion:	$y = a.x^b$	a,b
Exponentialfunktion:	$y = a.e^{b.x}$	a,b

Bemerkung: Exponential- und Potenzfunktion lassen sich im *halb*- bzw. *doppellogarithmischen* Maßstab durch *lineare* Funktionen, d.h. durch Geraden darstellen:

Exponentialfunktion $y = a.e^{b.x}$

$\ln(y) = \ln(a.e^{b.x}) = \ln a + \ln e^{b.x} = \ln a + b.x$

mit $z = \ln(y)$ und $c = \ln(a)$ erhält man die Gerade $z = b.x + c$

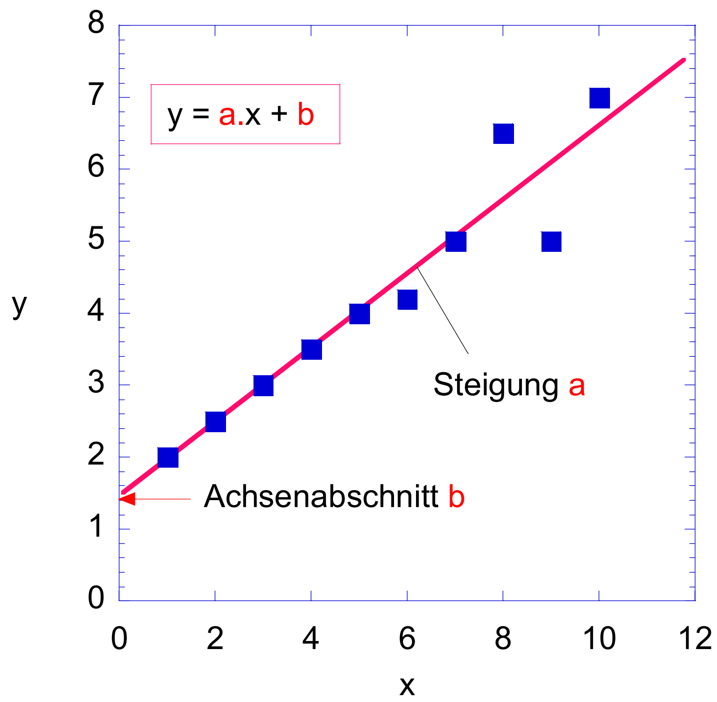
Potenzfunktion $y = a.x^b$

$\ln(y) = \ln(a.x^b) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln a + b.\ln(x)$

Mit $u = \ln(x)$, $v = \ln(y)$ und $c = \ln(a)$ erhält man die Gerade $v = b.u + c$

Beispiel: lineare Regression (Ausgleichsgeraden)

Diejenige Gerade y = a.x + b, die sich n vorgegebenen Meßpunkten $P_i=(x_i,y_i)$ „optimal“ anpaßt, heißt Ausgleichs- oder Regressionsgerade (n > 2). Steigung a und Achsenabschnitt b werden wie folgt berechnet:



Welches ist die Gerade **y = a.x + b,** die die Meßwerte am besten beschreibt? Gesucht sind also die Werte a und b, für die die Summe S der Quadrate der vertikalen Abstände zwischen den Meßpunkten und der Geraden so klein wie möglich ist, d.h.

$$S = -2.\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2.\sum_{i=1}^{n} x_i.(y_i - (a \cdot x_i + b)) = 0, \quad d.h. \quad \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i = a.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b.\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2.\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a \cdot x_i + b)) = 0, \quad d.h. \quad \bar{y} = a.\bar{x} + b$$

setzen wir b = $\bar{y}$ - a.$\bar{x}$ in untere Gleichung ein und lösen nach b auf,

$$a = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) . \left(\sum_{i=1}^{n} x_i . y_i\right)}{n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Damit sind Steigung a und y-Abschnitt b der besten Geraden durch die bekannten Meßwerte x_i und y_i ausgedrückt.